

Sưu tầm

Trần Tấn Đạt, Lê Hoài Nam

K41 Toán B Đại học Sư Phạm TP HCM

Ngày 14 tháng 12 năm 2018

Tóm tắt nội dung

Một cách giải khác cho bài toán tính kết thức của hai đa thức một biến.

Cho $\mathbb{F}$ là trường. Khi đó ta có bổ đề sau:

Bổ đề 0.1. Với mỗi $\alpha \in \mathbb{F}$ và $f(x) \in \mathbb{F}(x)$, ta đặt

$$\bar{f}(x) = f(x - \alpha)$$

$$\bar{g}(x) = g(x - \alpha)$$

Khi đó ta có:

$$|Syl(f, g)| = |Syl(\bar{f}, \bar{g})|$$

Chứng minh. Giả sử

$$f(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0 = c_m (x + \alpha)^m + \dots + c_1 (x + \alpha) + c_0$$

$$g(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0 = d_n (x + \alpha)^n + \dots + d_1 (x + \alpha) + d_0$$

(Lưu ý rằng có thể lấy $a_m = c_m = b_n = d_n = 1$)

Khi đó ta có:

$$\bar{f}(x) = c_m x^m + \dots + c_1 x + c_0$$

$$\bar{g}(x) = d_n x^n + \dots + d_1 x + d_0$$

Trong không gian vector các hệ số thuộc $\mathbb{F}$ và có bậc không vượt quá $m + n - 1$ (ký hiệu $\mathbb{F}_{m+n-1}[x]$), với mỗi đa thức $h(x) \in \mathbb{F}_{m+n-1}[x]$, $h(x)$ được viết duy nhất dưới dạng sau:

$$h(x) = f(x)q(x) + r(x)$$

Trong đó $\deg r(x) < n$ Xét ánh xạ tuyến tính được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{F}_{m+n-1}[x] &\longrightarrow \mathbb{F}_{m+n-1}[x] \\ h(x) &\longmapsto A(h(x)) = f(x)g(x) + r(x)g(x) \end{aligned}$$

- Xét các cặp cơ sở của $\mathbb{F}_{m+n-1}[x]$ sau:

$$\{f(x)x^{n-1}, f(x).x^{n-2}, \dots, f(x), x^{m-1}, \dots, x, 1\} \quad (1)$$

$$\{x^{m+n-1}, x^{m+n-2}, \dots, x, 1\} \quad (2)$$

Ma trận của A trong cặp cơ sở (1),(2) là:

$$[A]_{(1),(2)} = \begin{bmatrix} a_m & 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{m-1} & a_m & \dots & 0 & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & b_0 & b_1 & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{bmatrix} = Syl(f, g)$$

Xét cặp cơ sở khác của $\mathbb{F}_{m+n-1}[x]$

$$\{f(x)(x+\alpha)^{n-1}, f(x).(x+\alpha)^{n-2}, \dots, f(x), (x+\alpha)^{m-1}, \dots, (x+\alpha), 1\} \quad (3)$$

$$\{(x+\alpha)^{m+n-1}, (x+\alpha)^{m+n-2}, \dots, (x+\alpha), 1\} \quad (4)$$

Ma trận của A trong cặp cơ sở (3),(4) là:

$$[A]_{(3),(4)} = \begin{bmatrix} c_m & 0 & \dots & 0 & d_n & 0 & \dots & 0 \\ c_{m-1} & c_m & \dots & 0 & d_{n-1} & d_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & d_0 & d_1 & \ddots & \vdots \\ c_0 & c_1 & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_0 & 0 & 0 & \dots & d_0 \end{bmatrix} = Syl(\bar{f}, \bar{g})$$

- Ma trận đổi cơ sở từ (1) sang (3) là :

$$P_1 = P_{(1) \rightarrow (3)} = \begin{bmatrix} c_{n-1}^0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{n-1}^1 \alpha & c_{n-1}^0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1}^{n-1} \alpha^{n-1} & c_{n-1}^{n-2} \alpha^{n-2} & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{m-1}^0 & c_{m-2}^0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{m-1}^1 \alpha & c_{m-2}^1 \alpha & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{m-1}^{m-1} \alpha^{m-1} & c_{m-2}^{m-2} \alpha^{m-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Nhận xét $\det P_1 = 1$

- Ma trận đổi cơ sở từ (2) sang (4) là:

$$P_2 = P_{(2) \rightarrow (4)} = \begin{bmatrix} c_{m+n-1}^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{m+n-1}^1 \alpha & c_{m+n-2}^0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n-1}^{m+n-1} \alpha^{m+n-1} & c_{m+n-1}^{m+n-2} \alpha^{m+n-2} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Nhận xét $\det P_2 = 1$

Ta có

$$\begin{aligned} [A] /_{(3),(4)} &= P_2^{-1} [A] /_{(1),(2)} P_1 \\ &\iff \det [A] /_{(3),(4)} = \det [A] /_{(1),(2)} \\ &\implies |syl(f, g)| = |syl(\bar{f}, \bar{g})| \end{aligned}$$

□

Ta chứng minh định lý sau

Định lý 0.2. Cho hai đa thức $f(x), g(x) \in \mathbb{F}_{m+n-1}[x]$, khi đó ta có

$$|Syl(f, g)| = \prod_{i=1}^n g(\alpha_i)$$

Trong đó $n = \deg f(x)$ và α_i là nghiệm của $f(x)$

Chứng minh. Ta chứng minh quy nạp theo $m + n$ ($m = \deg g(x)$).

- Với $m + n = 2$. Khi đó $m = 1, n = 1$, dễ kiểm tra đẳng thức đúng.
- Giả sử công thức đúng với mọi m, n thỏa $m + n = k - 1$.
- Ta chứng minh công thức đúng với mọi m, n thỏa $m + n = k$

$$f(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_m)$$

$$g(x) = (x - \beta_1) \dots (x - \beta_n)$$

Đặt

$$\begin{aligned}\bar{f}(x) &= f(x + \alpha_1) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0 (a_m = 1, a_0 = 0) \\ &= x(a_m x^{m-1} + \dots + a_2 x + a_1) \\ &= x f_1(x)\end{aligned}$$

$$\bar{g}(x) = g(x + \alpha_1) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$$

Theo bổ đề ta có

$$\begin{aligned}|Syl(f, g)| &= |Syl(\bar{f}, \bar{g})| = \begin{vmatrix} a_m & 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{m-1} & a_m & \dots & 0 & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & b_0 & b_1 & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{vmatrix} \\ &= b_0 \cdot \begin{vmatrix} a_m & 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{m-1} & a_m & \dots & 0 & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & b_0 & b_1 & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{vmatrix} = b_0 |Syl(f_1, \bar{g})|\end{aligned}$$

Ta có $\deg f_1(x) = m - 1, \deg \bar{g}(x) = n$ nên

$$\deg f_1(x) + \deg \bar{g}(x) = m + n - 1 = k - 1$$

Áp dụng giả thiết quy nạp ta có

$$|syl(f, g)| = b_0 |syl(f_1, \bar{g})| = \bar{g}(0) \prod_{i=2}^m \bar{g}(\alpha'_i)$$

Trong đó α'_i là nghiệm của $f_1(x)$

Gọi $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ là nghiệm của $f(x)$. Khi đó nghiệm của $\bar{f}(x) = f(x + \alpha_1)$ là $0, \alpha_2 - \alpha_1, \dots, \alpha_m - \alpha_1$. Nghiệm của $f_1(x)$ hiển nhiên cũng là $n - 1$ nghiệm trong số đó và các nghiệm này. Và dễ thấy các nghiệm của $f_1(x)$ là $\alpha_2 - \alpha_1, \dots, \alpha_m - \alpha_1$. Từ đó ta có :

$$|syl(f, g)| = \bar{g}(0) \prod_{i=2}^m \bar{g}(\alpha_i - \alpha_1) = \prod_{i=1}^m g(\alpha_i - \alpha_1 + \alpha_1) = \prod_{i=1}^m g(\alpha_i)$$

Vậy định lý đã được chứng minh xong. □